בוחן אמצע סמסטר - חורף תש"ע (2009/10)

אלגברה 1מ' - 104016

1 בדצמבר 2009 - י"ד בכסלו תש"ע

פתרונות מלאים

שאלה 1 (20 נקודות) (אין קשר בין הסעיפים.)

א. יהיו Z ו- W מספרים מרוכבים המקיימים

$|Z| = |W| = 2$ ו- $ZW + 4 \neq 0$.

הוכח שהביטוי

$$\frac{Z+W}{ZW+4}$$

הוא מספר ממשי.

ב. מצא את כל המספרים המרוכבים Z המקיימים את המשוואה

$Z^2 = \overline{Z^3}$.

פתרון שאלה מספר 1:

סעיף א':

נכפול את הביטוי בצמוד של המכנה ונפשט:

$$\frac{z+w}{zw+4} = \frac{z+w}{zw+4}\cdot\frac{\overline{zw}+4}{\overline{zw}+4} = \frac{z\overline{zw}+w\overline{zw}+4z+4w}{|zw+4|^2} = \frac{|z|^2\,\overline{w}+|w|^2\,\overline{z}+4z+4w}{|zw+4|^2} =$$

$$= \frac{4\overline{w}+4\overline{z}+4z+4w}{|zw+4|^2} = \frac{4(z+\overline{z})+4(w+\overline{w})}{|zw+4|^2} = \frac{4(2\,\mathrm{Re}(z))+4(2\,\mathrm{Re}(w))}{|zw+4|^2} = \frac{8(\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w))}{|zw+4|^2}$$

מאחר והחלק הממשי של מספר מרוכב הוא מספר ממשי וכן מודול של מספר מרוכב הוא מספר ממשי הרי שהמונה והמכנה הם מספרים ממשיים ולכן המספר כולו ממשי.

פתרון סעיף ב':

נציב: $z = rcis\theta$ ונמצא r,θ:

$$z^2 = \overline{z}^3 \quad \Rightarrow \quad r^2cis(2\theta) = r^3cis(-3\theta)$$

נשווה תחילה את המודולים בשני האגפים:

$$r^2 = r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2(r-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = 0 \ , \ r_3 = 1$$

מאחר ו- $r = 0$ גורר $z = 0$ הרי שקיבלנו כי $z_{1,2} = 0$, כלומר זהו פתרון מריבוי 2.

לכל פתרון אחר, שונה מ- 0, מתקיים: $r = 1$. נמצא את θ במקרה זה:

$$2\theta = -3\theta + 360k$$
$$5\theta = 360k$$
$$\theta = 72k \quad k = 0,1,\ldots,4$$
$$z_3 = cis0^\circ \ , \ z_4 = cis72^\circ \ , \ z_5 = cis144^\circ \ , \ z_6 = cis216^\circ \ , \ z_7 = cis288^\circ$$

מצאנו סה"כ 7 פתרונות (6 שונים).

שאלה 2 (20 נקודות)

א. תהי A מטריצה ממשית מסדר 4×4. נתון ש־

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \quad \text{ו־} \quad A\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

מצא את הסכום של כל איברי המטריצה A (כלומר, את $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}$).

(תזכורת: ב־ a_{ij} מסמנים את האיבר של A השייך לשורה i ולעמודה j.)

ב. תהי B מטריצה ממשית כך ש־ $BB^T = 0$. הוכח ש־ $B = 0$. האם טענה זו נכונה גם עבור מטריצות מרוכבות?

פתרון שאלה מספר 2:

סעיף א':

מהנתון הימני נובע כי:

$$\begin{pmatrix}2a_{12}+2a_{14}\\2a_{22}+2a_{24}\\2a_{32}+2a_{34}\\2a_{42}+2a_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}a_{12}+a_{14}\\a_{22}+a_{24}\\a_{32}+a_{34}\\a_{42}+a_{44}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

מהנתון השמאלי נובע כי:

$$\begin{pmatrix}a_{11}+a_{13}\\a_{21}+a_{23}\\a_{31}+a_{33}\\a_{41}+a_{43}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

מכאן כי סכום האיברים בכל המטריצה שווה לסכום האיברים בשתי העמודות הנ"ל, כלומר:

$$(1+2+3+4)+\frac{1}{2}(2+3+4+5)=10+7=17$$

סעיף ב':

מאחר ולא נתון כי B ריבועית, נסמן את הסדר של B ב- $m \times n$, ונסמן את איברי המטריצה B ב- b_{ij}, ואת איברי B^T ב- b_{ij}^T, ומתקיים $b_{ij}^T = b_{ji}$. נבחין כי המטריצה BB^T היא ריבועית מסדר $m \times m$. נסתכל על איבר באלכסון של BB^T השווה, לפי הנתון, ל- 0:

$$0=(BB^T)_{ii}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{ki}^T=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}b_{ik}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}^2$$

קיבלנו כי סכום הריבועים של האיברים בשורה i של B שווה ל- 0. מאחר ואלו כולם מספרים ממשיים, הרי שכל אחד מהם בהכרח שווה ל- 0, כלומר כל האיברים בשורה ה-i-ית של B הם 0.

מאחר וזה נכון לכל $i = 1,\dots,m$ הרי שכל איברי המטריצה B הם 0 כלומר $B = 0$.

מאחר וסכום ריבועים של מספרים מרוכבים השווה ל- 0 אינו גורר שהמטריצה היא 0, הרי שמעל המרוכבים טענה זו לא נכונה.

דוגמא נגדית, נבחר: $m = n = 2$ ונסתכל על $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז $B \neq 0$ אבל:

$$BB^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי V מרחב המטריצות הממשיות מסדר 3×3 (מעל שדה המספרים הממשיים).
נגדיר

$$U = \{ A \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ אם } i+j \text{ זוגי} \}$$
$$W = \{ A \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ אם } i+j \text{ אי־זוגי} \}$$

(תזכורת: ב־ a_{ij} מסמנים את האיבר של A השייך לשורה i ולעמודה j.)

א. הוכח ש־ U ו־ W הם תת־מרחבים של V.

ב. האם $U+W$ הוא סכום ישר?

ג. האם $U+W=V$?

ד. יהי $Z = \{AB | A \in U,\ B \in W\}$. הוכח ש־ Z הוא תת־קבוצה של U.

פתרון שאלה מספר 3:

נרשום איבר כללי של U ושל W:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in R \right\} \quad ; \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d,e \in R \right\}$$

סעיף א':

כדי לקצר את תהליך ההוכחה של תת מרחב וקטורי, נשתמש במשפט האומר (בין השאר) שאם $v_1,\dots,v_k$ הם וקטורים ב- V אז $sp\{v_1,\dots,v_k\}$ הוא תת מרחב של V.

איבר כללי ב- U ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן, נקבל כי:

$$U = sp\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ומאחר ואלו הן מטריצות ב- $V = R^{3\times 3}$ הרי ש- U הוא תת מרחב של V.

באותו אופן,

$$W = sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ולכן גם הרי W הוא תת מרחב של V.

סעיף ב':

כדי לבדוק אם $U+W$ הוא סכום ישר, עלינו לבדוק האם $U\cap W=\{0\}$. לפי תנאי U הסכומים הזוגיים מהצורה $i+j$ נותנים איבר שהוא 0 ולפי תנאי W הסכומים מהצורה $i+j$ האי זוגיים נותנים איבר שהוא 0 ולכן אם A שייכת גם ל- U וגם ל- W ומאחר וכל סכום מהצורה $i+j$ הוא זוגי או אי זוגי (ולא שניהם בו זמנית), הרי ש- $A=0$, ולכן: $U+W=U\oplus W$.

סעיף ג':

כדי להוכיח ש- $V=U+W$ עלינו להוכיח הכלה כפולה:

(i) $U+W\subset V$: לפי סעיף א', U ו- W הם תתי מרחבים של V. לפי משפט סכום תתי מרחבים הוא תת מרחב ולכן $U+W$ תת מרחב של V ובפרט, $U+W\subset V$.

(ii) $V\subset U+W$: יש להראות שכל מטריצה A ב- V ניתנת לכתיבה כמטריצה ב- U ומטריצה ב- W. תהי $A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}$, אז:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b & 0\\ d & 0 & f\\ 0 & h & 0\end{pmatrix}}_{\in U}+\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & c\\ 0 & e & 0\\ g & 0 & k\end{pmatrix}}_{\in W}$$

מהכלה כפולה נובע שוויון, כלומר $V=U+W$. יתר על כן, מסעיף ב' נובע כי $V=U\oplus W$.

סעיף ד':

נבדוק כיצד נראה איבר בקבוצה Z:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0\\ d & 0 & f\\ 0 & h & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & c\\ 0 & e & 0\\ g & 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & eb & 0\\ ad+gf & 0 & cf+kd\\ 0 & eh & 0\end{pmatrix}\in U$$

קיבלנו איבר ב- U שכן כל האיברים במכפלה שסכום המקום שלהם הוא מספר זוגי שווה ל- 0 (אותו "מבנה" כמו לאיברי U).

שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הלינאריות $AX = b$ כאשר:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a^2 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2m \\ a-m+1 \end{pmatrix}$$

ו־ m, a הם פרמטרים.

א. קבע לאלו ערכים של a ו־ m למערכת

- אין פתרון.
- יש פתרון יחיד.
- יש אינסוף פתרונות.

ב. רשום את הפתרון הכללי של המערכת כאשר יש לה אינסוף פתרונות.

פתרון שאלה מספר 4:

נדרג תחילה את מטריצת המקדמים המורחבת :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a^2 & 2m \\ 1 & 0 & a^2 & a-m+1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 2m \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-m+1 \end{array}\right)$$

סעיף א':

מאחר ויש שלוש משוואות עם שלושה נעלמים, פתרון יחיד קיים אם"ם כל איבר מוביל שונה מ- 0 כלומר אם"ם $a-1 \neq 0$ וגם $a^2-1 \neq 0$ כלומר, אם"ם $a \neq 1,-1$, וכל m .

$a=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 2m \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-m+1 \end{array}\right) \underset{a=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m \\ 0 & 0 & 0 & 2-m \end{array}\right)$$

אם $2m \neq 0$ או $2-m \neq 0$ אין פתרון כלומר כדי שיהיה פתרון במקרה זה חייב להתקיים :

$m=0$ וגם $m=2$ וזה לא יתכן, כלומר עבור $a=1$ אין פתרון לכל m.

$a=-1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 2m \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-m+1 \end{array}\right) \underset{a=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2m \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{array}\right)$$

אם $m \neq 0$ אין פתרון. עבור $m = 0$ נציב ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2m \\ 0 & 0 & 0 & -m \end{array}\right) \underset{m=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad rank(A|b) = rank(A) = 2 < n = 3$$

קיבלנו אינסוף פתרונות עם: $3 - 2 = 1$ דרגות חופש.

סיכום:

פתרון יחיד: $a \neq 1, -1$ וכל m.

אינסוף פתרונות: $m = 0$, $a = -1$.

סתירה: $a = 1$ וכל m או $m \neq 0$, $a = -1$.

סעיף ב':

לפי סעיף א', אינסוף פתרונות קיים אם"ם $m = 0$, $a = -1$. מהדרוג וההצבות שקיבלנו בסעיף זה המשוואות הן:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (-x_3, 0, x_3)$$

שאלה 5 (15 נקודות)

לפניך טענה. אם היא נכונה הוכח אותה; אם היא לא נכונה הפרך אותה ע"י דוגמא נגדית:

אם u, v ו־ w הם וקטורים במרחב וקטורי V, ונתון ש־ $u \neq 0$, אז

$$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u,\ v) \cap \mathrm{Sp}(u,\ w)$$

פתרון שאלה מספר 5:

הטענה איננה נכונה. נביא דוגמא נגדית. נבחר את $V = R^2$ ונבחר:

$$u = (1,0) \neq 0 \in V$$
$$v = (0,1) \in V$$
$$w = (0,2) \in V$$

אז נקבל כי:

$$sp\{u,v\} = sp\{u,w\} = R^2$$
$$\Downarrow$$
$$sp\{u,v\} \cap sp\{u,w\} = R^2 \neq sp\{(1,0)\}$$